Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 22 maggio 2025

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = x(\log x)^2$$

determinandone insieme di definizione, continutà, derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), punti di massimo e minimo locali e assoluti, monotonia, estremi superiore e inferiore, convessità e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Affinché la funzione sia definita, l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo. Otteniamo quindi che il dominio è $\{x > 0\}$. D'ora in poi, lavoreremo solo su questo insieme. Notiamo subito che f è derivabile, e quindi continua, su tutto il suo dominio in quanto prodotto di funzioni derivabili.

Notiamo subito che abbiamo $f(x) \geq 0$ per ogni x, quindi f è limitata inferiormente. Studiamo i limiti agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

per gerarchia degli infiniti e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

visto che tutti i termini tendono a $+\infty$. In particolare, f non è limitata superioremente. Abbiamo inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} (\log x)^2 = +\infty.$$

La funzione non ha quindi nessun asintoto (orizzontale, verticale, obliquo).

Calcoliamo la derivata prima. Abbiamo

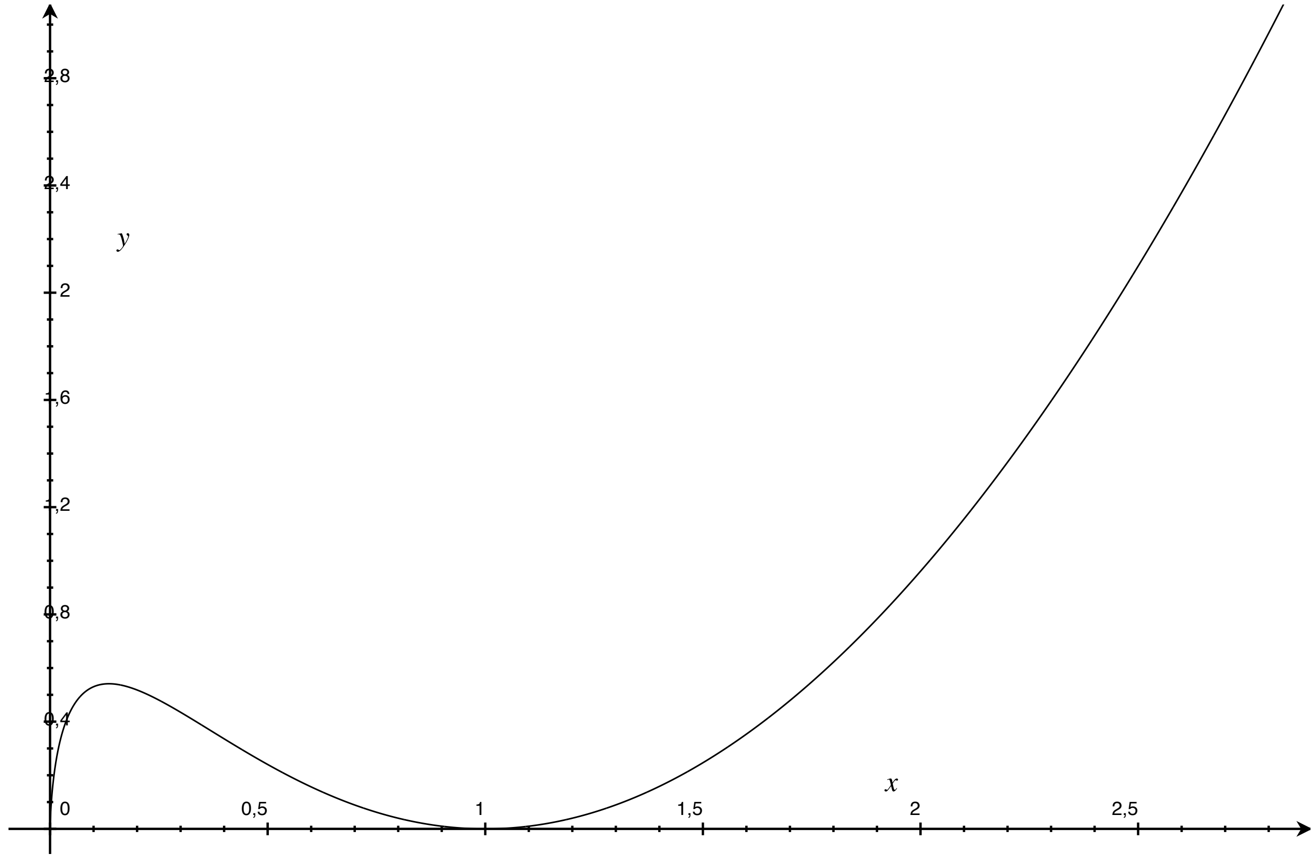
$$f'(x) = (\log x)^2 + 2\log x = (\log x)(2 + \log x).$$

Studiamone il segno. Il primo termine è positivo per $x > 1$, il secondo per $x > e^{-2}$. Abbiamo quindi $f' > 0$ (e quindi f strettamente crescente) su $(0, e^{-2})$ e $(1, \infty)$ e $f' < 0$ (e quindi f strettamente decrescente) su $(e^{-2}, 1)$. Abbiamo un minimo globale in 1 (dove $f(0) = 0$) e un massimo locale in e^{-2} (dove $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$).

Calcoliamo la derivata seconda. Abbiamo

$$f''(x) = \frac{2 + 2\log x}{x}.$$

Visto che il denominatore è sempre positivo, il segno è dato dal numeratore. Abbiamo quindi $f''(x) < 0$ per $x < e^{-1}$ (dove f è quindi concava) e $f''(x) > 0$ per $x > e^{-1}$ (dove f è convessa), e abbiamo un punto di flesso in e^{-1}, dove $f''(e^{-1}) = 0$.



Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\right)^n.$$

Soluzione

Esercizio 3 Determinare gli eventuali punti di massimo locale, minimo locale o di sella della funzione $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=x^4+y^4-xy.$$

Soluzione